

Uniwersytet Warszawski
Wydział Fizyki

Daniel Pęczak

Nr albumu: 290923

Co widzi kosmonauta zbliżając się do horyzontu czarnej dziury?

Praca licencjacka
na kierunku Fizyka w ramach
Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów
Matematyczno-Przyrodniczych

Praca wykonana pod kierunkiem
dr. Adama Szereszewskiego
Katedra Teorii Względności i Grawitacji
Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki UW

Warszawa, sierpień 2012

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data

Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadomy odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data

Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

W niniejszej pracy zbadano co widzi kosmonauta, który opada na czarną dziurę. Znaleziono zerowe krzywe geodezyjne, a także całki ruchu dla metryki Schwarzschilda. Do opisu geodezyjnych wykorzystano funkcję Weierstrassa \wp . Następnie wyznaczono ugięcie promieni świetlnych w układzie dalekiego obserwatora oraz stożek graniczny (wyznaczający promienie, które emitowane przez obserwatora wpadną do czarnej dziury) w układzie obserwatorów nieruchomego oraz ruchomego.

W efekcie otrzymano zależności rozmiarów kątowych czarnej dziury widzianej przez obserwatora (zarówno opadającego jak i spoczywającego nad czarną dziurą).

Słowa kluczowe

czarna dziura, geodezyjna zerowa, funkcja Weierstrassa \wp , promień świetlny, ugięcie światła, aberracja, metryka Schwarzschilda

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

13200 Fizyka

Tytuł pracy w języku angielskim

What does an astronaut see approaching to the black hole's horizon?

Spis treści

| | |
|--|----|
| Wstęp | 5 |
| 1. Linie geodezyjne | 7 |
| 1.1. Geodezyjne | 7 |
| 1.2. Wielkości zachowane | 8 |
| 1.3. Całki ruchu | 9 |
| 1.4. Opis zerowych geodezyjnych przy użyciu funkcji Weierstrassa \wp | 11 |
| 2. Obserwowane efekty | 15 |
| 2.1. Kąt ugięcia | 15 |
| 2.2. Kąt ugięcia w układzie nieruchomego kosmonauty | 15 |
| 2.3. Obserwator w ruchu | 19 |
| Wnioski | 23 |

Wstęp

Ogólna teoria względności była niewątpliwie przełomem w fizyce. Równania Einsteina podane po raz pierwszy w [4] mają następującą postać:

$$R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ab},$$

gdzie R_{ab} jest tensorem Ricciego, g_{ab} — metryką, R — skalarem Ricciego, T_{ab} — tensorem energii-pędu, natomiast c oraz G są stałymi fizycznymi, odpowiednio prędkością światła oraz stałą grawitacji.

Niedługo po opublikowaniu tej przełomowej pracy, Karl Schwarzschild podał [6] rozwiązanie równań Einsteina, które jest sferycznie symetryczne. Mimo, że jest to jeden z najprostszych przypadków, okazuje się, że bardzo dobrze opisuje on zakrzywienie czasoprzestrzeni wokół obiektów sferycznie symetrycznych — gwiazd oraz planet, stąd jest często wykorzystywany do modelowania rzeczywistości.

O ile współcześnie badania skupiają się na kwantowej teorii grawitacji, uważam że „klasyczna” teoria względności pozostaje nadal ciekawa, ponieważ na co dzień nie obserwujemy bezpośrednio efektów tej teorii. Efektów, które są sprzeczne z intuicją, która ukształtowała się pod wpływem niedużego (ziemskiego) pola grawitacyjnego. Zagadnienie jest tym bardziej interesujące, że nic nie wskazuje na to, żeby tytułowe pytanie w najbliższej przyszłości uzyskało odpowiedź zdobytą za pomocą doświadczenia.

Celem pracy jest znalezienie obrazu nieba, które widzi kosmonauta opadający na czarną dziurę o masie M . Przyjmuję, że światło jest emitowane jedynie przez bardzo odległe gwiazdy i pomijam wielokrotne obrazy obiektów. Czarna dziura nie rotuje, zatem metryka opisująca zakrzywienie czasoprzestrzeni jest metryką Schwarzschilda:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix},$$

gdzie M jest masą czarnej dziury, natomiast $\frac{2GM}{c^2}$ to promień Schwarzschilda. W dalszej części pracy przyjmuję konwencję, że $G = c = 1$.

W pierwszym rozdziale z zasady wariacyjnej wyprowadzona jest zależność na zerową linię geodezyjną, wyznaczono całki ruchu dla metryki Schwarzschilda oraz przedstawiono linie geodezyjne za pomocą funkcji Weierstrassa \wp .

W drugim rozdziale opisane są efekty, które może obserwować obserwator (kosmonauta lub obserwator daleki), czyli kąt ugięcia światła, kąt ugięcia, który widzi kosmonauta oraz to co widzi kosmonauta opadający na czarną dziurę. Na koniec zostały wykreślone rozmiary kątowe czarnej dziury, jakie widzi obserwator spoczywający nad czarną dziurą oraz wpadający do czarnej dziury.

Rozdział 1

Linie geodezyjne

1.1. Geodezyjne

Niech $x^a(\tau)$ będzie krzywą niezerową. Długość infinitezimalnego elementu łuku (parametryzowaną zmienną τ) w zakrzywionej przestrzeni opisywanej metryką g_{ab} wyraża się wzorem:

$$ds = \sqrt{\left| g_{ab} \frac{dx^a}{d\tau} \frac{dx^b}{d\tau} \right|} d\tau \stackrel{\text{ozn}}{=} \lambda d\tau. \quad (1.1)$$

Aby znaleźć linię geodezyjną, czyli linię o (lokalnie) ekstremalnej długości, łączącą punkty A oraz B należy skorzystać z równań Eulera-Lagrange'a dla następującego Lagranżianu

$$\mathcal{L}(x, x') = \sqrt{|g_{ab} x'^a x'^b|}, \quad (1.2)$$

gdzie $x'^a = \frac{dx^a}{d\tau}$.

Na podstawie równania (1.1) mamy

$$\dot{x}^a = \frac{dx^a}{ds} = \frac{1}{\lambda} \frac{dx^a}{d\tau} = \frac{x'^a}{\lambda}. \quad (1.3)$$

Równania Eulera-Lagrange'a mają postać:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a}.$$

W związku z czym

$$0 = \frac{d}{d\tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'^a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^a} = 2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{g_{ba} x'^b}{2\lambda} \right) - \frac{g_{bc,a} x'^b x'^c}{2\lambda} \stackrel{(1.3)}{=} \frac{\lambda}{2} (2g_{ba,c} \dot{x}^b \dot{x}^c + 2g_{ba} \ddot{x}^b - g_{bc,a} \dot{x}^b \dot{x}^c). \quad (1.4)$$

W ostatnim przekształceniu zmieniona została parametryzacja. Odtąd tor będzie parametryzowany długością łuku s .

Korzystając z symetrii w b i c z równania (1.4) dostajemy:

$$(g_{ba,c} + g_{ca,b}) \dot{x}^b \dot{x}^c + 2g_{da} \ddot{x}^d - g_{bc,a} \dot{x}^b \dot{x}^c = (g_{ba,c} + g_{ca,b} - g_{bc,a}) \dot{x}^b \dot{x}^c + 2g_{da} \ddot{x}^d,$$

co jest równoważne (po podzieleniu przez 2):

$$0 = \Gamma_{dbc} \dot{x}^b \dot{x}^c + g_{da} \ddot{x}^a \Leftrightarrow \ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc} \dot{x}^b \dot{x}^c = 0. \quad (1.5)$$

Wprowadzoną wielkość nazywamy symbolem Christoffela i definiujemy w następujący sposób:

$$\Gamma_{abc} = \frac{1}{2}(g_{ba,c} + g_{ba,b} - g_{bc,a}).$$

Równanie (1.5) możemy zapisać w następującej postaci, używając $u^a = \dot{x}^a$, gdzie u^a jest czteroprędkością:

$$\dot{u}^a + \Gamma^a_{bc} u^b u^c = 0. \quad (1.6)$$

Jako, że kropką oznaczamy różniczkowanie wzdłuż krzywej, równoważny będzie następujący zapis

$$u^a \partial_a u^c + \Gamma^c_{ab} u^a u^b = 0,$$

gdzie $u^a \partial_a$ oznacza pochodną styczną do krzywej. Stosując w tym wyrażeniu definicję pochodnej kowariantnej otrzymujemy schludne wyrażenie opisujące geodezyjne w czasoprzestrzeni:

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \quad (1.7)$$

Zakładamy, że przyjmując dodatkowe założenie $u_a u^a = 0$, równanie (1.7) opisuje także geodezyjne zerowe, które interpretujemy jako promienie świetlne w czasoprzestrzeni.

1.2. Wielkości zachowane

Większość fizycznie ciekawych czasoprzestrzeni opisywana jest przez metryki posiadające wiele symetrii. Metryka Schwarzschilda doskonale opisuje czasoprzestrzeń w przypadku nierotującej czarnej dziury. Łatwo zauważyć, że ów metryka nie zależy od czasu oraz jest sferycznie symetryczna.

Zgodnie z twierdzeniem Noether symetriom towarzyszą wielkości zachowane. Znając symetrie metryki i wyznaczając związane z nimi stałe ruchu można zwykle uprościć rachunki, gdyż operowanie bezpośrednio równaniem (1.6) bywa żmudne. W tym celu wygodne będzie zdefiniowanie następującego obiektu.

k^a jest wektorem Killinga, jeżeli spełnia równanie Killinga:

$$\nabla_{(a} k_{b)} = 0 \Leftrightarrow \nabla_a k_b + \nabla_b k_a = 0. \quad (1.8)$$

Można łatwo pokazać, że jeżeli k^a istnieje, to metryka się wzdłuż niego nie zmienia:

$$0 = \nabla_a k_b + \nabla_b k_a = \nabla_a (g_{bc} k^c) + \nabla_b (g_{ac} k^c) = g_{bc} \nabla_a k^c + g_{ac} \nabla_b k^c + k^c \nabla_c g_{ab} = \mathcal{L}_k g_{ab},$$

gdzie skorzystano z tego, że pochodna kowariantna metryki wynosi zero. Operator \mathcal{L}_k oznacza pochodną Liego wzdłuż pola wektorowego k^a . Zatem skoro pochodna Liego się zeruje, to znaczy, że metryka przenoszona wzdłuż pola Killinga się nie zmienia.

Szczególnie pomocny okazuje się następujący lemat.

Lemat 1. *Niech γ będzie krzywą geodezyjną, k^a wektorem Killinga, natomiast u^a — wektorem stycznym do γ . Wtedy iloczyn skalarny $g_{ab} k^a u^b$ jest stały wzdłuż γ .*

Dowód. Wektor k^a spełnia równanie (1.8), z którego wynika:

$$\nabla_a k_b = -\nabla_b k_a. \quad (1.9)$$

Ponadto z definicji krzywej geodezyjnej wiemy, że

$$u^a \nabla_a u^b = 0. \quad (1.10)$$

Jeżeli iloczyn skalarny jest stały, to jego pochodna wzdłuż krzywej jest równa zero.

$$\begin{aligned} u^c \nabla_c (g_{ab} k^a u^b) &= u^c \nabla_c (g_{ab} k^a) u^b + u^c \nabla_c (u^b) g_{ab} k^a = \\ &= u^c \nabla_c (k_b) u^b + u^c \nabla_c (u^b) k_b \stackrel{(1.10)}{=} u^c \nabla_c (k_b) u^b \stackrel{(1.9)}{=} -u^c \nabla_b (k_c) u^b \stackrel{(1.10)}{=} \\ &\stackrel{(1.10)}{=} -u^b \nabla_b (k_c) u^c - u^b \nabla_b (u^c) k_c = -u^b \nabla_b (g_{ac} k^a u^c). \end{aligned}$$

Stąd

$$u^c \nabla_c (g_{ab} k^a u^b) = -u^b \nabla_b (g_{ac} k^a u^c).$$

Czyli

$$u^c \nabla_c (g_{ab} k^a u^b) = 0 \Rightarrow g_{ab} k^a u^b = \text{const.}$$

□

Powyższy lemat zostanie wykorzystany w następnym rozdziale do wyznaczenia zerowych geodezyjnych.

1.3. Całki ruchu

Niech $x^a(s) = (t(s), r(s), \theta(s), \phi(s))$ będzie geodezyjną zerową. W metryce Schwarzschilda wektory $k_t^a = \delta^a_0$ oraz $k_\phi^a = \delta^a_3$ są wektorami Killinga, zatem zgodnie z lematem 1 ich iloczyny skalarne z czteropędkością

$$u^a = \frac{dx^a}{ds} = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$$

są stałe na geodezyjnych. Wyznaczone w ten sposób całki ruchu wynoszą:

$$\begin{aligned} k_t^a u_a &= \delta^a_0 u_a = \dot{t} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = E = \text{const}, \\ k_\phi^a u_a &= \delta^a_3 u_a = -r^2 \dot{\phi} = -L = \text{const}, \end{aligned} \tag{1.11}$$

gdzie dla dużych r stałe E i L interpretujemy jako energię i moment pędu na jednostkę masy spoczynkowej. Ruch będzie odbywał się w płaszczyźnie, zatem można przyjąć $\theta = \frac{\pi}{2}$, co implikuje $\dot{\theta} = 0$ oraz $\sin \theta = 1$.

Dodatkowy warunek wynika z faktu, że wektor czteropędkości dla krzywej zerowej ma długość zero:

$$0 = u_a u^a = \dot{t}^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right) - \dot{r}^2 \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} - \dot{\phi}^2 r^2 \Leftrightarrow 0 = E^2 - \dot{r}^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right). \tag{1.12}$$

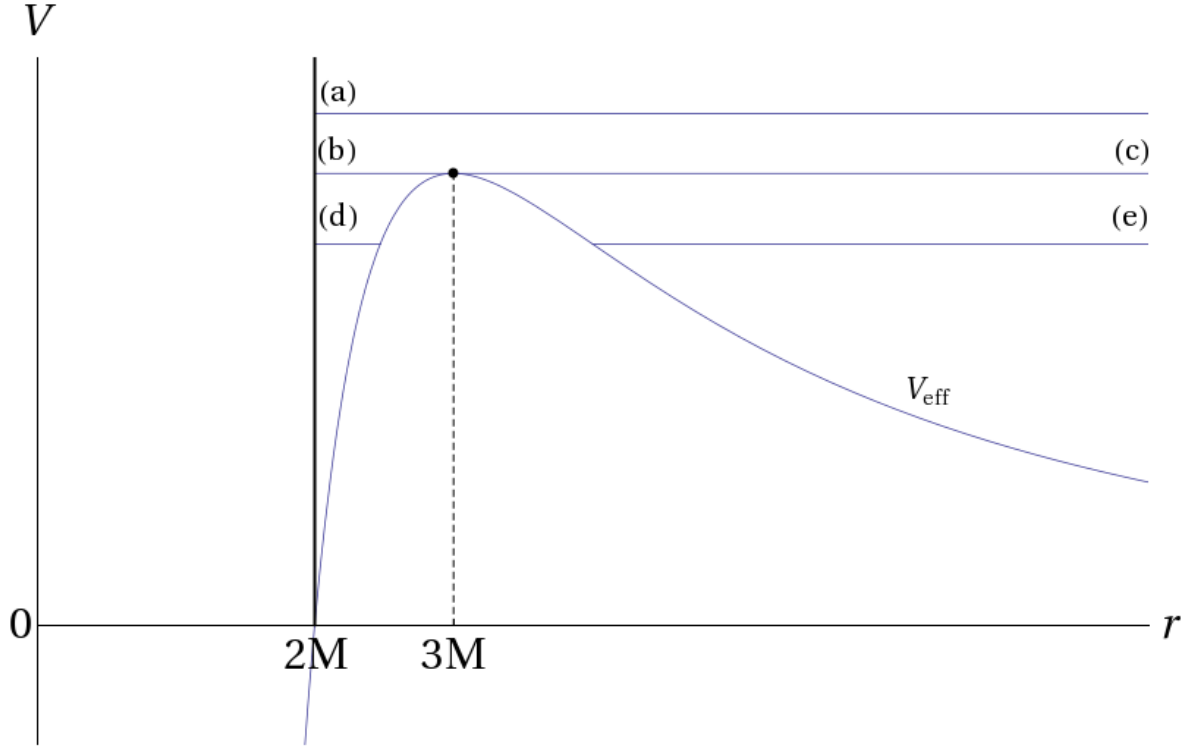
Z równań (1.11) oraz (1.12) dostajemy:

$$\dot{r}^2 = E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \tag{1.13}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{r^2}. \tag{1.14}$$

W równaniu (1.13) można wydzielić człon

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right),$$



Rysunek 1.1: Wykres potencjału efektywnego V_{eff} w funkcji współrzędnej r . Na wykresie zaznaczono trajektorie promieni świetlnych (a),(b),(c) oraz (d) dla różnych parametrów zderzenia. Czarną linią zaznaczono horyzont zdarzeń, natomiast przerywaną — orbitę fotonową. Kropką zostało oznaczone maksimum potencjału V_{eff} .

który zachowuje się tak jak potencjał efektywny znany z rozważań w mechanice klasycznej. Wygodnie jest wprowadzić wielkość $b = \frac{L}{E}$ zwaną parametrem zderzenia. Na rys. 1.1 przedstawiono wykres potencjału efektywnego V_{eff} z naniesionymi trajektoriami promieni świetlnych, które różnią się wartością parametru zderzenia.

Dla małych wartości parametru zderzenia (linia (a) na rys. 1.1), promień świetlny jest pochłaniany, tzn. wpada pod horyzont.

Maksimum potencjału występuje dla $r = 3M$. Odpowiada to równowadze niestabilnej. Odpowiednio dobierając parametr zderzenia można sprawić, że światło porusza się po okręgu. Orbita ta nazywana jest orbitą fotonową. Jakikolwiek zaburzenie ruchu fotonów na ów orbicie skutkuje jego spadkiem na czarną dziurę (linia (b)), bądź oddaleniem się do nieskończoności (linia (c)).

Linia (d) odpowiada trajektoriom znajdującym się poniżej orbity fotonowej, natomiast linia (e) — trajektoriom promieni ugiętych.

Dzieląc stronami równania (1.13) oraz (1.14) otrzymujemy następujące równanie różniczkowe:

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 = \frac{r^4}{L^2} \left(E^2 - \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \right) = \left(\frac{E}{L} \right)^2 r^4 - r^2 + 2Mr, \quad (1.15)$$

z którego możemy wyznaczyć tor promieni świetlnych.

1.4. Opis zerowych geodezyjnych przy użyciu funkcji Weierstrassa \wp

Wygodna jest jednak inna forma równania (1.15). Dokonajmy następującego podstawienia:

$$r = \frac{M}{2y + \frac{1}{6}}, \quad (1.16)$$

$$dr = -\frac{M}{2} \left(y + \frac{1}{12}\right)^{-2} dy,$$

które doprowadzi nas do równania:

$$\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2 = 4y^3 - \underbrace{\frac{1}{12}}_{g_2} y - \underbrace{\left(\frac{1}{216} - \left(\frac{EM}{2L}\right)^2\right)}_{g_3}.$$

Rozwiązaniem tego równania jest funkcja eliptyczna Weierstrassa $y = \wp(\phi + \phi_0)$ z parametrami g_2, g_3 oraz $\phi_0 = \text{const}$. Ten ostatni będzie wygodnie opisywać za pomocą parametru zderzenia:

$$g_3 = \left(\frac{1}{216} - \left(\frac{EM}{2L}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{216} - \left(\frac{M}{2b}\right)^2\right). \quad (1.17)$$

Korzystając z zależności (1.16) łączącej y oraz r otrzymujemy:

$$r(\phi) = \frac{M}{2} \left(\wp(\phi + \phi_0) + \frac{1}{12}\right)^{-1}. \quad (1.18)$$

W równaniu (1.18) część rzeczywista stałej ϕ_0 może być pominięta w argumentie funkcji \wp (powoduje ona jedynie obrót trajektorii).

Funkcja Weierstrassa \wp jest definiowana następującym równaniem [3]:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{m,n} \left\{ \frac{1}{(z - 2m\omega_1 - 2n\omega_2)^2} - \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_2)^2} \right\},$$

gdzie wartości m i n przebiegają przez wszystkie liczby całkowite, ale nie mogą równocześnie się zerować. Jak już wcześniej zostało powiedziane funkcja ta spełnia następujące równanie różniczkowe:

$$\wp'^2(z) = 4\wp^3(z) - g_2\wp(z) - g_3, \quad (1.19)$$

gdzie $g_2 = \frac{1}{12}$, a g_3 jest zdefiniowane w (1.17). Prawa strona równania (1.19) jest wielomianem trzeciego stopnia i z zasadniczego twierdzenia algebry wynika, że można go przedstawić w następującej postaci

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3),$$

gdzie e_1, e_2, e_3 są pierwiastkami wielomianu. Jeżeli wszystkie trzy są rzeczywiste, to przyjmuje się, że $e_1 > e_2 > e_3$, natomiast jeżeli jeden jest rzeczywisty oznaczany jest e_2 . Dwa pozostałe pierwiastki są zespolone i ze sobą sprzężone. Ze wzorów Viète'a dla wielomianu trzeciego stopnia mamy:

$$\begin{cases} e_1 + e_2 + e_3 = 0 \\ g_3 = 4e_1e_2e_3 \\ g_2 = -4(e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1) = 2(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2). \end{cases}$$

Funkcja Weierstrassa $\wp(z)$ jest funkcją dwuokresową, tzn. dla półokresów $\omega_1 \in \Re$ oraz $\omega_3 \in i\Re$ funkcja ma następującą własność:

$$\wp(z + 2\omega_1) = \wp(z + 2\omega_3) = \wp(z).$$

Półokresy wyrażają się za pomocą następujących wzorów:

$$\omega_1 = \int_{e_1}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2t - g_3}},$$

$$\omega_3 = -i \int_{-\infty}^{e_3} \frac{dt}{\sqrt{g_3 + g_2t - 4t^3}}.$$

Ponadto zachodzi

$$\wp(\omega_i) = e_i,$$

$$\wp'(\omega_i) = 0,$$

gdzie wprowadzę oznaczenie $\omega_2 = -\omega_1 - \omega_3$.

Dla ustalonej masy czarnej dziury wszystkie krzywe zerowe można opisać za pomocą jednej tylko zmiennej — parametru zderzenia b . W zależności od jego wartości mamy do czynienia z różnymi sytuacjami, co zostało pokazane na rysunku 1.2. [5]

Wprowadźmy następującą wielkość pomocniczą:

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

W zależności od znaku wyróżnika Δ mamy do czynienia z różnymi przypadkami.

Jeżeli $\Delta > 0$ to parametr zderzenia jest mniejszy od parametru krytycznego (rys. 1.2(a))

$$r(\phi) = \frac{M}{\frac{1}{6} + 2\wp(\phi)}.$$

Dla $\Delta = 0$ parametr zderzenia przyjmuje wartość krytyczną $b_{kr} = 3\sqrt{3}M$. Funkcja \wp redukuje się do funkcji elementarnej i dostajemy zależność na $r(\phi)$:

$$r(\phi) = \left(\frac{1}{3M} + \frac{2e^\phi}{M(e^\phi - 1)} \right)^{-1},$$

dla obszaru $r < 3M$ oraz w pozostałej części przestrzeni:

$$r(\phi) = \frac{2M}{\operatorname{tgh}^2\left(\frac{\phi}{2}\right) - \frac{1}{3}}.$$

Funkcje te są narysowane na rys. 1.2(b) oraz 1.2(c).

Gdy $\Delta < 0$, wtedy parametr zderzenia jest większy od parametru krytycznego. Odpowiada to sytuacjom fizycznym, gdy geodezyjna kończy się i zaczyna w osobliwości lub kończy się i zaczyna w nieskończoności. Pierwszy przypadek jest opisywany za pomocą następującej funkcji:

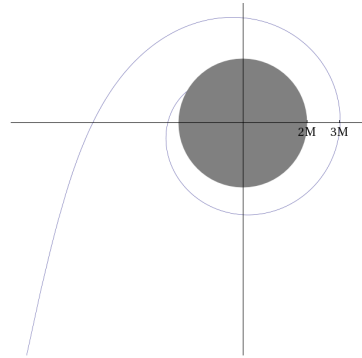
$$r(\phi) = \frac{M}{\frac{1}{6} + 2\wp(\phi)},$$

a trajektoria jest przedstawiona na rys. 1.2(d).

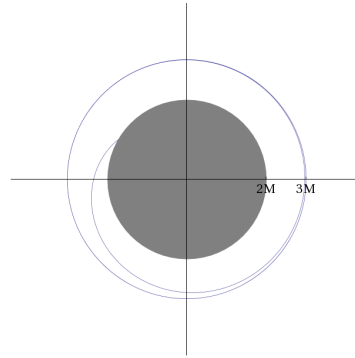
Drugi przypadek jest opisany za pomocą funkcji (rys. 1.2(e)):

$$r(\phi) = \frac{M}{\frac{1}{6} + 2\wp(\phi + \omega_3)}.$$

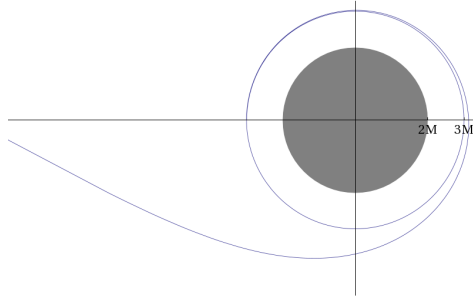
W niniejszej pracy najistotniejsze są geodezyjne (a), (c), (e), czyli te, które zaczynają się w nieskończoności.



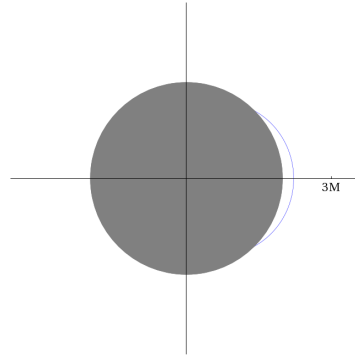
(a) Geodezyjna zerowa o parametrze zderzenia $b = 5,195M$, nieco mniejszym od parametru krytycznego b_{kr} .



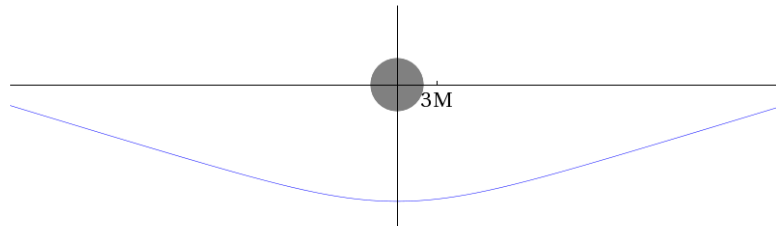
(b) Geodezyjna zerowa o parametrze zderzenia $b = 3\sqrt{3}M$, równym parametrowi krytycznemu b_{kr} , opadające z orbity fotonowej na horyzont.



(c) Geodezyjna zerowa o parametrze zderzenia $b = 3\sqrt{3}M$, równym parametrowi krytycznemu b_{kr} , opadające na orbitę fotonową z nieskończoności.



(d) Rysunek przedstawia trajektorie geodezyjnych zerowych, które zaczynają się i kończą na osi.



(e) Ugięcie promienia świetlnego o parametrze zderzenia $b = 10M$.

Rysunek 1.2: Rysunek przedstawia geodezyjne dla różnych wartości Δ , a co za tym idzie różnych wartości parametru zderzenia. Szarym kołem zaznaczono horyzont zdarzeń.

Rozdział 2

Obserwowane efekty

2.1. Kąt ugięcia

Promienie, które padają na czarną dziurę z nieskończoności z parametrem zderzenia większym od parametru krytycznego (przedstawione na rys. 2.1) są uginane pod następującym kątem

$$\beta = 2 \left| \varphi^{-1} \left(-\frac{1}{12} \right) - \omega_3 \right| - \pi.$$

Zależność kąta ugięcia od parametru zderzenia przedstawiono na rys. 2.2. Wykres zgadza się z intuicją, ponieważ dla dużych wartości b kąt ugięcia maleje do zera — daleko od czarnej dziury promienie nie powinny być przez nią uginane. Z kolei, gdy parametr zderzenia dąży do wartości krytycznej $b_{\text{kr}} = 3\sqrt{3}M$, wartość kąta ugięcia dąży do nieskończoności. Odpowiada to sytuacji, gdy promień porusza się po okręgu na orbicie fotonowej.

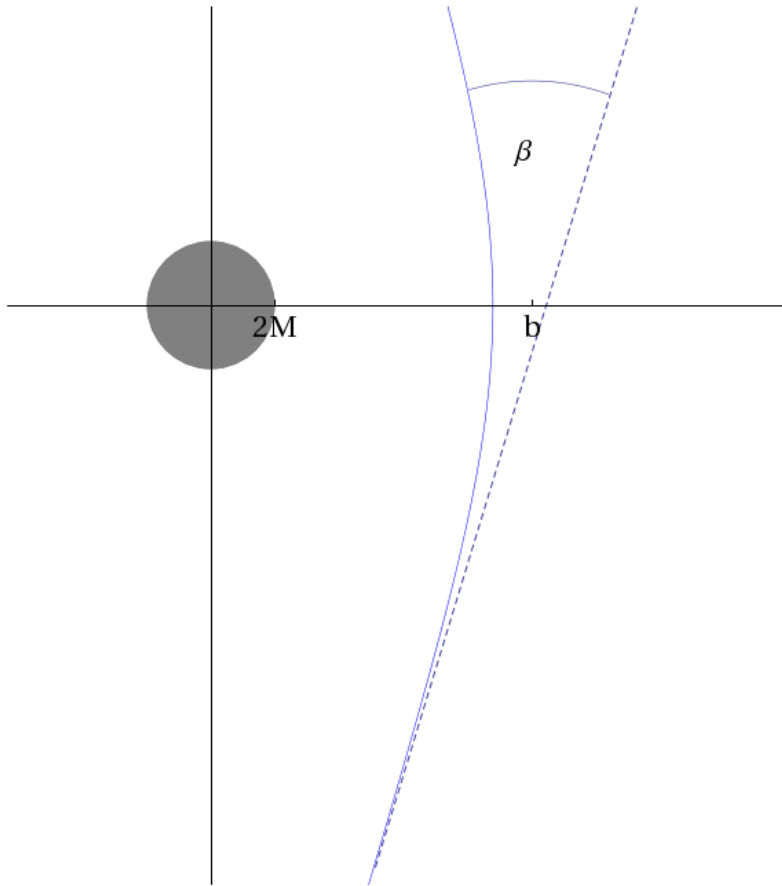
2.2. Kąt ugięcia w układzie nieruchomego kosmonauty

Bieg promieni świetlnych można odwracać, więc promieniom, które przychodzą z nieskończoności odpowiadają promienie wysyłane do nieskończoności. Trajektorie pokazane na rysunkach 2.4 oraz 2.5 zostały wyrażone we współrzędnych dalekiego obserwatora i odpowiadają promieniom wysyłanym pod pewnym kątem. Wszystkie kąty liczymy w taki sposób, aby fragment płaszczyzny określony przez wybór kąta nie zawierał punktu $r = 0$ (kąt mierzymy tak jak zaznaczono na rys. 2.3 — od dodatniego kierunku r).

Łatwo zauważyć, że istnieje pewien graniczny kąt α , pod którym wysłany promień wleci do czarnej dziury. Promienie wysyłane pod tym kątem tworzą graniczny stożek. Kąt α można wyznaczyć rysując styczną do geodezyjnej w punkcie, w którym znajduje się kosmonauta. Nie będzie to jednak kąt przez niego zmierzony, a jedynie kąt wyznaczony przez dalekiego obserwatora. Żeby wiedzieć co widzi i jaki kąt graniczny zmierzy kosmonauta odległy o d od czarnej dziury, należy przejść do jego układu, który jest lokalnie płaski. Transformacja jest wyrażona wzorami:

$$d\tilde{t} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} dt,$$

$$d\tilde{r} = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}}.$$



Rysunek 2.1: Rysunek przedstawia ugięcie promienia świetlnego o kąt β . Parametr zderzenia b dla promienia jest równy $10M$, gdzie M to masa obiektu tworzącego czarną dziurę. Szarym kołem zaznaczono horyzont zdarzeń.

Prędkość światła w układzie dalekiego obserwatora można rozłożyć na część radialną:

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)}$$

oraz na część transwersalną:

$$v_t = r \frac{d\phi}{dt} = r \frac{\dot{\phi}}{\dot{t}} = r \frac{L}{r^2} \frac{1 - \frac{2M}{r}}{E} = \frac{b}{r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right).$$

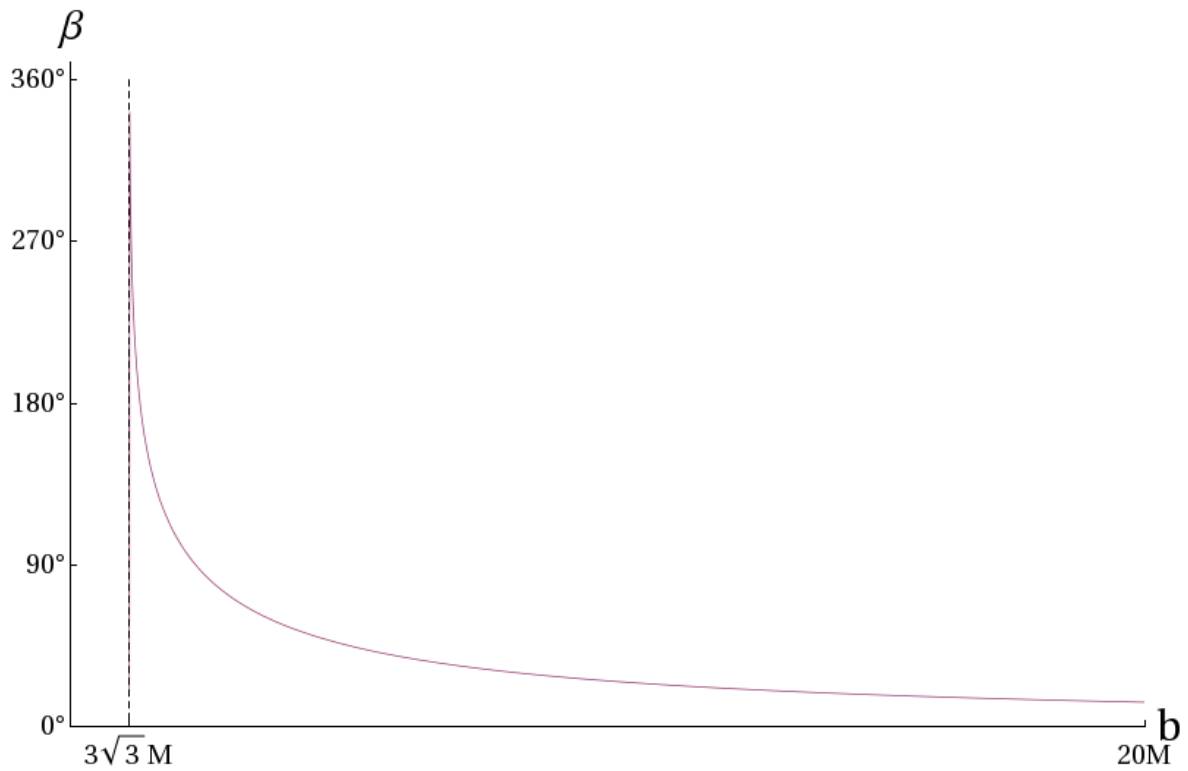
Prędkości te można wyrazić w układzie kosmonauty:

$$\tilde{v}_r = \frac{d\tilde{r}}{d\tilde{t}} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)},$$

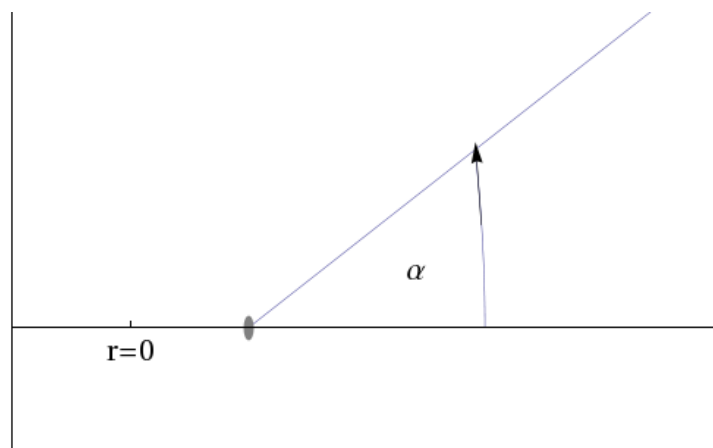
$$\tilde{v}_t = r \frac{d\tilde{\phi}}{d\tilde{t}} = \frac{r}{\sqrt{1 - \frac{2M}{r}}} \frac{b}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right).$$

Z bezpośredniego rachunku widać, że

$$\tilde{v}_t^2 + \tilde{v}_r^2 = \tilde{v}^2 = 1.$$



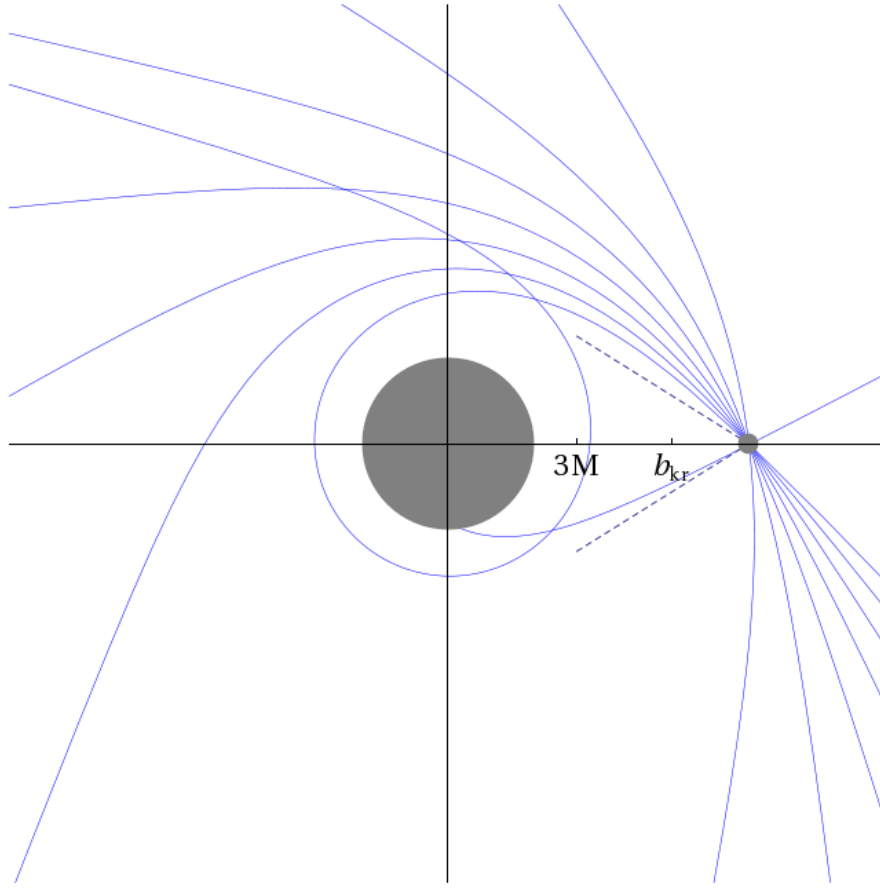
Rysunek 2.2: Wykres przedstawia zależność kąta ugięcia β promienia świetlnego na masie M od parametru zderzenia b . Przerwaną linią zaznaczono wartość $b_{kr} = 3\sqrt{3}M$.



Rysunek 2.3: Sposób mierzenia kątów używany w niniejszej pracy.

Rozkładając prędkość światła na składowe dostajemy:

$$\sin \tilde{\alpha} = \frac{\tilde{v}_t}{\tilde{v}} = \tilde{v}_t = \frac{b}{r} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}},$$



Rysunek 2.4: Trajektorie promieni świetlnych, które wypuszcza kosmonauta pod różnymi kątami. Dla parametrów większych od parametru krytycznego promienie wychodzą do nieskończoności, dla parametru mniejszego — trajektoria kończy się na osobliwości. Linia przerywaną zaznaczono stożek graniczny.

z czego wynika:

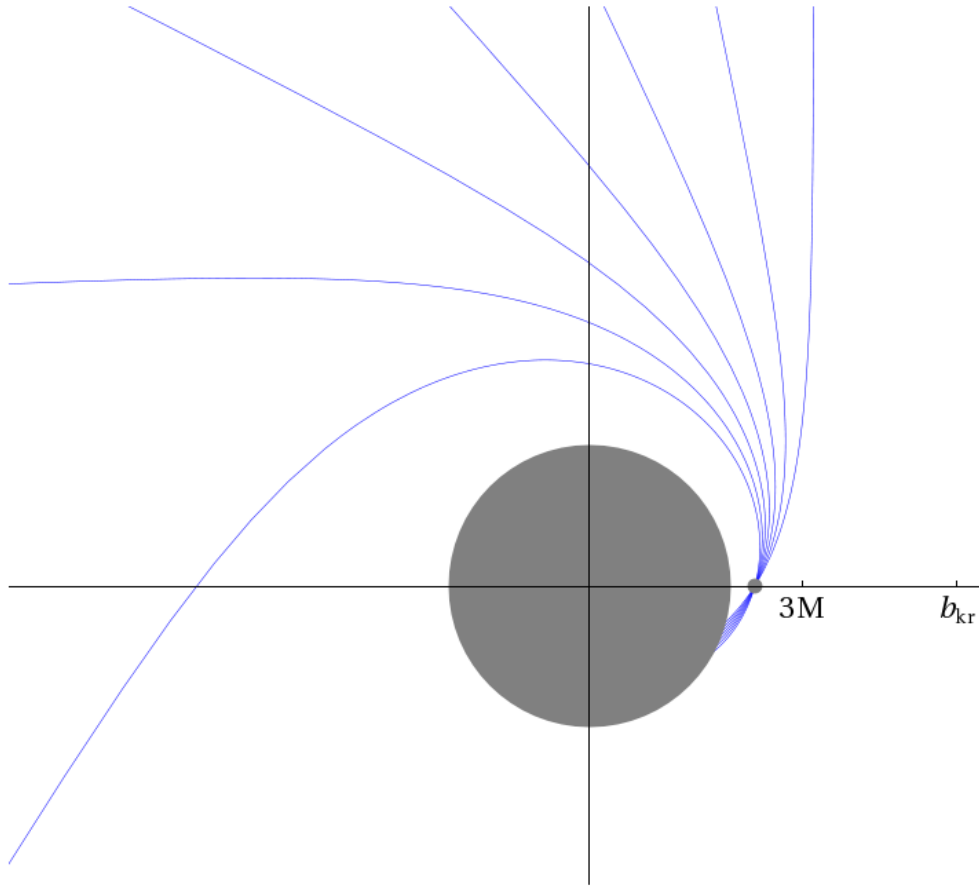
$$\tilde{\alpha} = \arcsin \left(\frac{b}{r} \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} \right). \quad (2.1)$$

Kąt $\tilde{\alpha}$ jest kątem, pod którym obserwator (nieruchomy) znajdujący się w punkcie r widzi promień światła scharakteryzowany parametrem zderzenia b .

Podstawiając do (2.1) odległość d i parametr krytyczny $b_{kr} = 3\sqrt{3}M$ dostajemy wzór na kąt graniczny:

$$\tilde{\alpha}_g = \arcsin \left(\frac{3\sqrt{3}M}{d} \sqrt{1 - \frac{2M}{d}} \right). \quad (2.2)$$

Zależność (2.2) wykreślono na rys. 2.6. Dla $d = 3M$ kąt graniczny wynosi $\frac{\pi}{2}$ — połowa promieni wysyłanych przez kosmonautę w losowych kierunkach zostanie zaabsorbowanych przez czarną dziurę. Dla dużych wartości d kąt wynosi π , co oznacza, że tylko promienie wysyłane radialnie na czarną dziurę wpadną pod horyzont. Z kolei, gdy kosmonauta jest blisko czarnej dziury, czyli dla d bliskich $2M$ prawie wszystkie promienie będą pochłonięte, z wyjątkiem promieni wypuszczanych radialnie, w kierunku przeciwnym niż czarna dziura.



Rysunek 2.5: Trajektorie promieni świetlnych, które wypuszcza kosmonauta pod różnymi kątami, dla parametrów mniejszych od parametru krytycznego.

Łatwo wywnioskować, że rozmiar kątowy czarnej dziury jest opisywany wzorem

$$\tilde{\theta} = 2(\pi - \tilde{\alpha}_g),$$

co zostało przedstawione na rys. 2.7. Wynika z niego, że dla kosmonauty (nieruchomego) znajdującego się w odległości $d = 3M$ od czarnej dziury, zajmuje ona aż pół nieboskłonu, powiększając się stale aż do momentu osiągnięcia horyzontu — wtedy kosmonauta widzi ją patrząc w dowolnym kierunku.

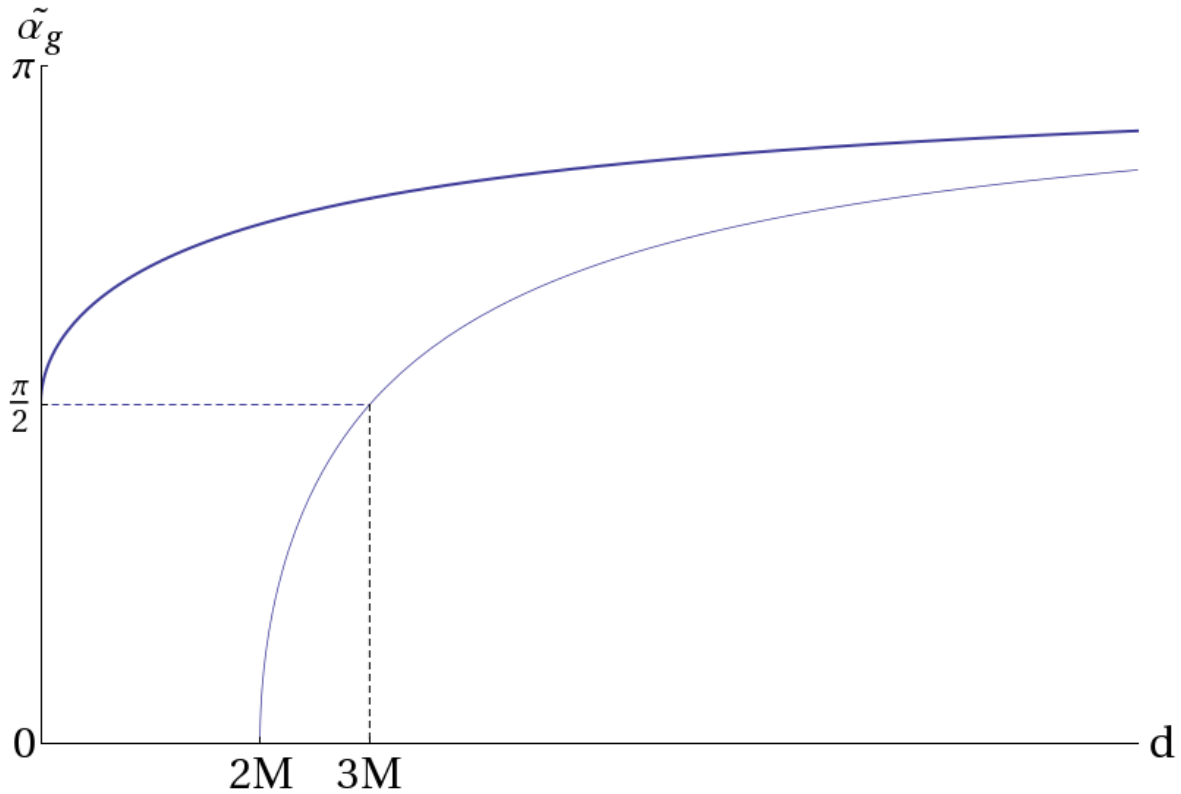
2.3. Obserwator w ruchu

Do tej pory rozważane było co widzi nieporuszający się obserwator, który jest umieszczony w odległości d od czarnej dziury.

Prędkość obserwatora opadającego z nieskończoności na czarną dziurę zgodnie z [2] wynosi $\beta = \sqrt{\frac{2M}{r}}$. Rozmiary kątowe czarnej dziury widziane przez poruszającego się obserwatora można wyznaczyć dokonując transformacji kąta do układu współporuszającego się.

Aberracja według [1] ma następującą postać:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta},$$



Rysunek 2.6: Rysunek przedstawia zależność kąta granicznego $\tilde{\alpha}_g$ od odległości d nieruchomego kosmonauty od czarnej dziury (cienka linia). Pogrubioną linią zaznaczono podobną zależność dla ciała opadającego na czarną dziurę.

co można zapisać w postaci:

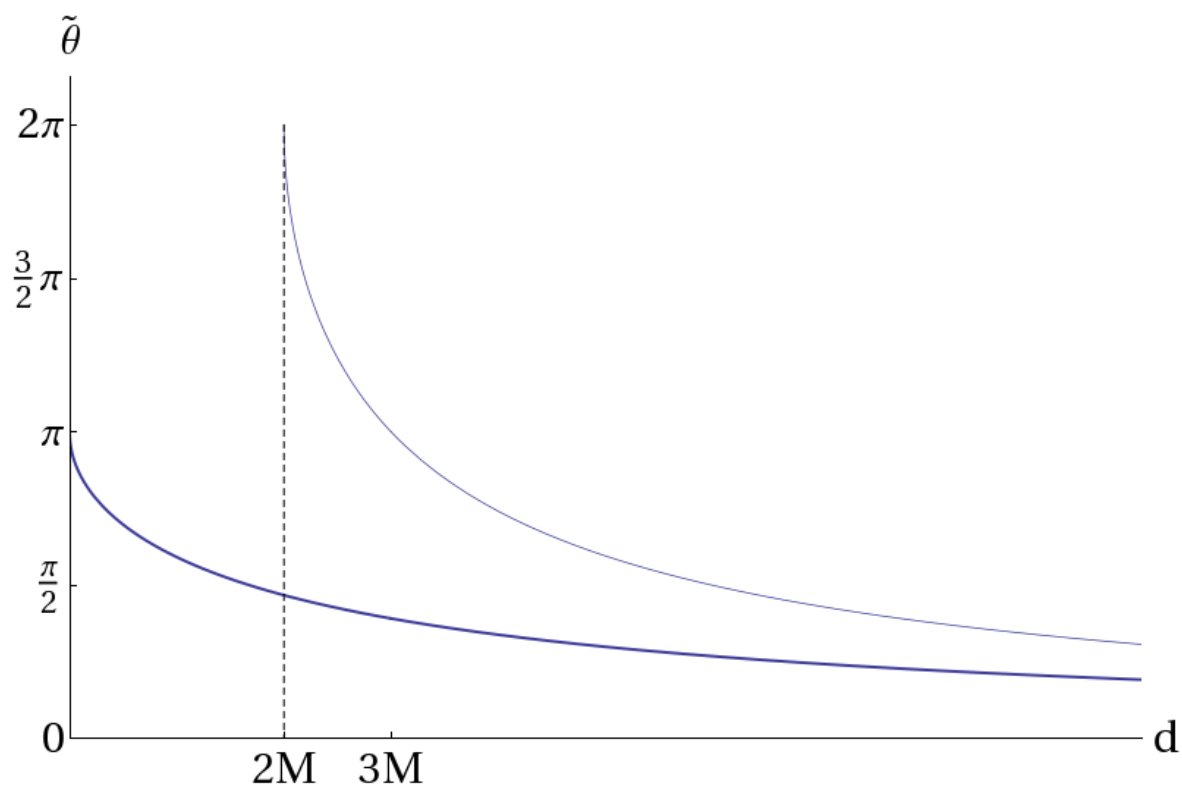
$$\operatorname{tg} \frac{\theta'}{2} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2},$$

gdzie θ' jest kątem mierzonym w układzie współporuszającym się.

Zależność rozmiarów kątowych czarnej dziury od odległości opadającego kosmonauty jest pokazana grubą linią na rys. 2.7. Warto zauważyć, że daleko od masywnego obiektu widziany jest on jako punkt. Natomiast gdy kosmonauta zbliża się do niego, w odległości $d = 2M$ czarna dziura ma następujące rozmiary kątowe:

$$\lim_{d \rightarrow 2M} 2 \left(\pi - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \right) \right) = 2\pi - 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{b_{\text{kr}}}{2M} \right) = 2\pi - 4 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \approx 84^\circ.$$

Opadający obserwator będzie widział fotony o innej energii niż te wysyłane przez obiekty. Po pierwsze wynika to z tego, że fotony zyskują energię w polu grawitacyjnym. Po drugie opadający obserwator o dużej prędkości widzi fotony o innej częstotliwości — zwykle niższej niż energie fotonów wysyłanych przez źródło.



Rysunek 2.7: Rysunek przedstawia zależność rozmiarów kątowych czarnej dziury $\tilde{\theta}$ od odległości d kosmonauty od czarnej dziury (cienka linia). Pogrubioną linią zaznaczono podobną zależność dla ciała opadającego na czarną dziurę.

Wnioski

W pracy wyprowadzono wzory na linie geodezyjne, całki ruchu w metryce Schwarzschilda oraz zapisano je za pomocą funkcji Weierstrassa \wp . Następnie pokazano możliwe trajektorie promieni świetlnych oraz prześledzono jak zmienia się położenie punktów na niebie kosmonauty, który stoi w odległości d od czarnej dziury, a także kosmonauty, który opada na czarną dziurę. Na koniec wykreślono rozmiary kątowe czarnej dziury dla obserwatorów spoczywającego oraz opadającego.

Analiza geodezyjnych zerowych przeprowadzona w pracy pokazuje, że obrazy gwiazd obserwowanych w sytuacji, gdy przed nami znajduje się czarna dziura, ulegają przesunięciu w kierunku „od środka” czarnej dziury (patrz rys. 2.4) Poza tym (jak opisano w rozdz. 2.2) czarna dziura zajmuje coraz więcej miejsca na niebie, przez co fragment, na którym są gwiazdy zmniejsza się.

Bibliografia

- [1] J. Wheeler C. Misner, K. Thorne. *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
- [2] M. Demiański. *Astrofizyka relatywistyczna*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1991.
- [3] G. N. Watson E. T. Whittaker. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [4] A. Einstein. Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 1916.
- [5] G. W. Gibbons M. Vyska. The application of weierstrass elliptic functions to schwarzschild null geodesics. *Classical and Quantum Gravity*, 6(29), marzec 2012.
- [6] K. Schwarzschild. Über das gravitationsfeld eines massenpunktes nach der einsteinschen theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 1916.